

## ТЕМА 11

### СДВИГ. КРУЧЕНИЕ

#### 11.1. Понятие о сдвиге. Расчет на срез

Многие конструкции, соединительные элементы (болты и заклепки), сварные и клеевые соединения испытывают деформацию сдвига. Сдвиг относится к числу простых видов деформации, когда из шести компонентов главного вектора внутренних сил и главного момента лишь поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  не равны нулю. Используя полученные выше интегральные зависимости между напряжениями и внутренними силовыми факторами, установим связь между поперечными силами и касательными напряжениями при сдвиге:

$$Q_y = \int_A \tau_y \cdot dA,$$
$$Q_z = \int_A \tau_z \cdot dA.$$

Запишем формулы для напряжений, необходимые при расчете на срез элементов конструкций, имеющих форму бруса. Выполним это на примере резания ножницами полосы (Рис.11.1). Деформация сдвига в полосе вызывается внешними силами  $P$ , приложенными на близком расстоянии друг от друга и действующими в противоположных направлениях. При этом в поперечном сечении полосы возникают касательные напряжения  $\tau_y$  и поперечная сила  $Q_y$  как их интегральная сумма.

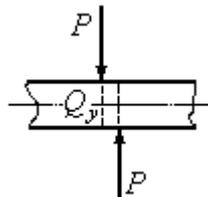


Рис.11.1

Поперечная сила в сечении  $Q_y = P$ . Опуская в дальнейшем индексы при  $Q$  и  $\tau$ , получим интегральную связь между поперечной силой и касательными напряжениями в виде:

$$Q = \int_A \tau \cdot dA. \quad (11.1)$$

Будем считать, что касательные напряжения  $\tau$  равномерно распределены по площади поперечного сечения  $A$  полосы. Тогда из выражения (11.1) получим формулу для касательных напряжений в поперечном сечении:

$$\tau = \frac{P}{A}. \quad (11.2)$$

Принятое допущение о равномерном распределении касательных напряжений по площади поперечного сечения полосы весьма условно. Тем не менее, в инженерных расчетах этим допущением широко пользуются, например, при расчете болтовых, заклепочных и сварных соединений, шпонок, врубок и т.д.

При расчете на срез необходимо знать величину допускаемого напряжения  $[\tau]$ . Экспериментально эту величину установить сложно, так как деформация сдвига часто сопровождается другими видами деформации, главным образом, изгибом. Поэтому мы установим величину  $[\tau]$ , исследуя напряженное состояние, возникающее при чистом сдвиге.

## 11.2. Понятие о чистом сдвиге

*Чистым сдвигом* будем называть такой вид плоского напряженного и деформированного состояния, при котором на двух взаимно перпендикулярных площадках, ориентированных определенным образом, действуют только касательные напряжения.

Этот вид напряженного состояния возникает в том случае, если на двух взаимно перпендикулярных площадках будут действовать главные напряжения, равные по величине и противоположные по знаку (Рис.11.2). В этом случае в площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам, будут действовать только касательные напряжения, величина которых будет равна величине главных нормальных напряжений.

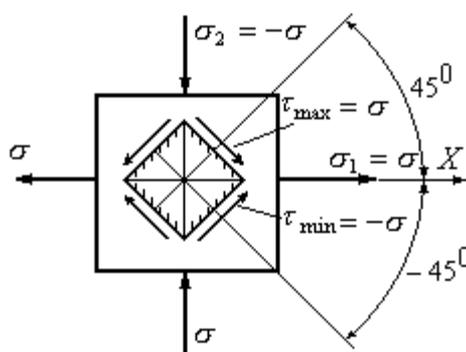


Рис.11.2

Указанные площадки называют *площадками чистого сдвига*. Принимая эти площадки за исходные (Рис.11.3) и полагая в формулах (9.11) и (9.12)  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{yx} = -\tau$ , получим:

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha, \quad (11.3)$$

$$\tau_\alpha = -\tau \cos 2\alpha, \quad (11.4)$$

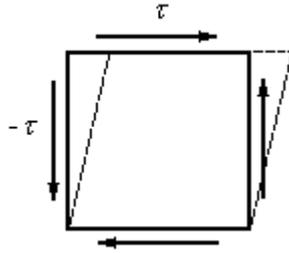


Рис.11.3

Формула (11.3) указывает, что  $\sigma_\alpha$  обращается в ноль только на площадках чистого сдвига (при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = n\frac{\pi}{2}$ ). На всех других площадках напряжения не равны нулю (Рис.11.4).

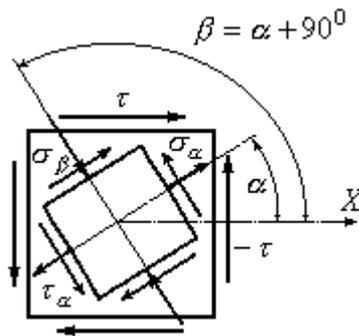


Рис.11.4

Интересно отметить следующую особенность нормальных напряжений при чистом сдвиге: на любых взаимно перпендикулярных площадках нормальные напряжения равны и противоположны по знаку ( $\sigma_\beta = -\sigma_\alpha$ ). Это следует из формулы (11.3):  $\sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\sin 2\alpha$ . Таким образом, при чистом сдвиге наблюдается своеобразный закон парности нормальных напряжений, по форме аналогичный закону парности касательных напряжений. Отсюда следует, что при чистом сдвиге главные напряжения удовлетворяют условию  $\sigma_1 = -\sigma_2$ .

Как уже отмечалось выше в практических приложениях чистый сдвиг встречается крайне редко. Тем не менее, существует возможность исследовать деформацию чистого сдвига экспериментально. Типичным примером тела, во всех точках которого имеет место чистый сдвиг, является скручиваемая тонкостенная труба. Деформация кручения часто используется для экспериментального изучения работы материалов на сдвиг, так как практически не удастся создать напряженное состояние чистого сдвига путем непосредственного приложения касательных напряжений к кромкам исследуемого тела.

### 11.3. Анализ напряженного состояния при чистом сдвиге

Исследуем напряженное состояние при чистом сдвиге: определим величину экстремальных нормальных напряжений и их направление. Для этого воспользуемся полученными в теме №9 выражениями (9.19) для величин главных напряжений и (9.20) для определения их направления.

Подставляя в формулы (9.19)  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{yx} = -\tau$ , получим:  $\sigma_{1,2} = \pm\sqrt{\tau^2}$ . Откуда  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = -\tau$ .

Направление главного напряжения из формул (9.20):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-\tau}{-\tau} = 1, \text{ откуда } \alpha_1 = 45^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-\tau}{-(-\tau)} = -1, \text{ откуда } \alpha_2 = -45^\circ.$$

Для определения положения главных площадок найденные углы будем откладывать от положительного направления оси  $X$  до нормали к соответствующей площадке (Рис.11.5).

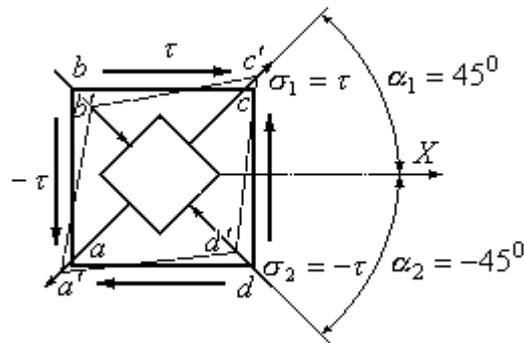


Рис.11.5

Таким образом, при чистом сдвиге главные напряжения – сжимающие и растягивающие – равны между собой и численно равны экстремальным касательным напряжениям. Главные площадки составляют с площадками чистого сдвига угол  $45^\circ$ .

На рис.11.5 пунктиром показано ромб  $a'b'c'd'$ , в который превратился квадрат  $abcd$  в результате деформации. Как видно из рис.11.5, изменились прямые углы элемента  $abcd$ , изменили свою длину диагонали элемента  $abcd$ : диагональ  $ac$  под действием растягивающих напряжений удлинилась, диагональ  $cd$  – укоротилась. Стороны же элемента не изменяют своей длины, так как на гранях элемента отсутствуют нормальные напряжения. Очевидно, объем элемента  $abcd$  в процессе деформации не изменился.

Действительно, чистый сдвиг представляет собой единственный вид плоского напряженного состояния, при котором отсутствует изменение объема материала, а любой выделенный элемент меняет только форму. Чтобы это

показать, вычислим с помощью формулы (9.82) относительное изменение объема  $\theta$  при  $\sigma_1 = -\sigma_2$  и  $\sigma_3 = 0$ :

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E}(-\sigma_2 + \sigma_2) = 0.$$

Как и следовало ожидать, относительное изменение объема оказалось равным нулю.

#### 10.4. Закон Гука при чистом сдвиге. Вывод зависимости между модулями упругости первого и второго рода

Рассмотрим деформацию элемента, ограниченного площадками чистого сдвига (Рис.11.6).

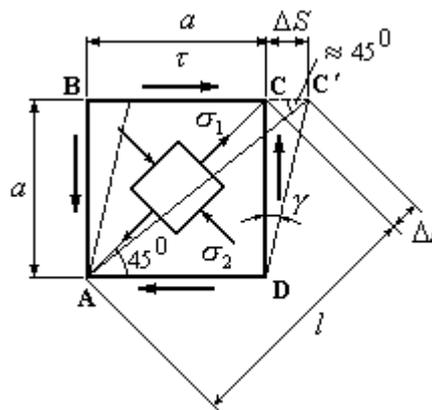


Рис.11.6

Величину  $\Delta S$  называют абсолютным сдвигом. Из треугольника  $CDC'$   $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}$ ; учитывая малость угла  $\gamma$ , можно принять  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ , откуда следует:

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (11.5)$$

Величину  $\gamma$  в формуле (11.5) называют *относительным сдвигом* или *углом сдвига*.

Рассмотрим некоторые результаты экспериментальных исследований. Если скручивать тонкостенную трубу из пластичной стали, то между касательными напряжениями и углом сдвига можно обнаружить зависимость, график которой представляет собой так называемую *диаграмму сдвига* (Рис.11.7), напоминающую собой диаграмму напряжений при осевом растяжении. Здесь так же, как и на диаграмме напряжений при растяжении можно обнаружить такие характеристики прочности, как предел

пропорциональности  $\tau_{\text{пл}}$ , предел текучести  $\tau_T$ , предел прочности  $\tau_B$ . Так же, как и при растяжении при постоянном напряжении  $\tau = \tau_T$  наблюдается значительный рост сдвигов (текучесть при сдвиге), сменяющейся затем стадией упрочнения.

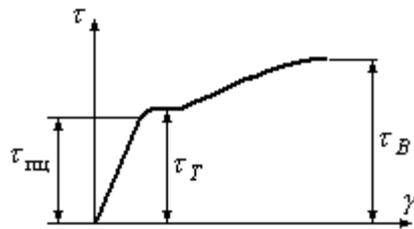


Рис.11.7

Из диаграммы сдвига следует, что в пределах упругости между относительным сдвигом и касательными напряжениями существует линейная зависимость, которая может быть выражена в форме закона Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma, \quad (11.6)$$

где  $G$  - модуль упругости при сдвиге или модуль упругости второго рода. Размерность модуля упругости (МПа). Для каждого материала модуль упругости имеет свое значение. Так, для стали  $G \approx 8,0 \cdot 10^4$  МПа; для алюминия  $G \approx 2,7 \cdot 10^4$  МПа. Величина модуля сдвига  $G$  определяется экспериментально.

Расчеты показали, что для изотропных материалов между модулем сдвига  $G$  и модулем упругости при растяжении  $E$  существует зависимость. Найдем ее. Для этого рассмотрим деформацию элемента, испытывающего чистый сдвиг (Рис.11.6). Выразим длину диагонали  $AC$   $l$  через размер стороны элемента  $a$ :

$$l = a\sqrt{2}.$$

Абсолютное удлинение диагонали элемента  $\Delta l$ , выраженное через абсолютный сдвиг  $\Delta S$ , имеет вид:

$$\Delta l = CC' \cos\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) \approx CC' \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}.$$

Тогда относительное удлинение диагонали

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S}{\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\Delta S}{2a} = \frac{\gamma}{2}.$$

Относительный сдвиг из закона Гука при чистом сдвиге (11.6) равен:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Подставляя значение относительного сдвига, выраженное, через величину касательных напряжений, в предыдущую формулу, получим:

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}. \quad (11.7)$$

Для дальнейшего вывода воспользуемся обобщенным законом Гука (9.73). В соответствии с этим законом наибольшая относительная линейная деформация  $\varepsilon_1$  совпадает по направлению с главным напряжением  $\sigma_1$ , которое в свою очередь в рассматриваемом случае напряженного состояния действует вдоль диагонали АС. Следовательно, полученное удлинение  $\varepsilon$  (11.7) может быть вычислено как наибольшая деформация  $\varepsilon_1$  из обобщенного закона Гука при  $\sigma_3 = 0$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2).$$

Учитывая, что при чистом сдвиге  $\sigma_1 = \tau$ , а  $\sigma_2 = -\tau$ , получим выражение для  $\varepsilon$  в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{1 + \mu}{E} \tau. \quad (11.8)$$

Из сравнения формул (11.7) и (11.8) найдем:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (11.9)$$

Формула (11.9) показывает, что три упругие постоянные изотропного материала  $E, G$  и  $\mu$  связаны между собой. Найдя из опыта две из них, можно третью посчитать по формуле (11.9). Например, для стали при  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа и коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,25$  значение модуля сдвига найдем из формулы (11.9):

$$G = \frac{2,0 \cdot 10^5}{2(1 + 0,25)} = 8,0 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Это значение для модуля сдвига совпадает с экспериментальным значением.

Запишем выражение для абсолютного сдвига  $\Delta S$  при чистом сдвиге. Обозначая площадь грани элемента (Рис.11.6) через  $A$ , равнодействующую сдвигающую силу  $Q = A\tau$ , получим:

$$\Delta S = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Qa}{GA}, \text{ т.е. } \Delta S = \frac{Qa}{GA}. \quad (11.10)$$

Формула (11.10) выражает закон Гука при сдвиге в абсолютных величинах.

Произведение модуля сдвига на площадь в знаменателе формулы (11.10) называется жесткостью поперечного сечения при сдвиге.

### 10.5. Потенциальная энергия при чистом сдвиге

При деформации элемента, ограниченного площадками чистого сдвига (Рис.11.9,а), работу совершает только касательная сила  $T$ , приложенная к его верхней грани на перемещении  $\Delta S$ .

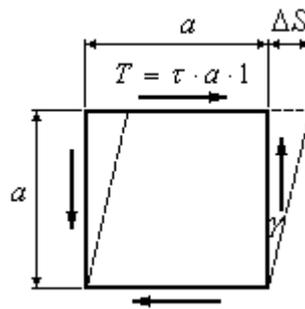


Рис.11.8

Примем размер элемента, перпендикулярный рисунку, равным единице. Тогда сила  $T = \tau a \cdot 1$ . Работа этой силы по теореме Клапейрона (7.7) равна:

$$A_p = \frac{T\Delta S}{2}. \quad (11.11)$$

Потенциальная энергия численно равняется работе внешних сил:

$$U = A_p = \frac{1}{2}T\Delta S. \quad (11.12)$$

Учитывая, что  $T = \tau \cdot a$ ,  $\Delta S = \gamma \cdot a$ , выражение для потенциальной энергии получим в виде:

$$U = \frac{1}{2}\tau\gamma a^2. \quad (11.13)$$

Выражение для удельной потенциальной энергии при чистом сдвиге получим, разделив полную потенциальную энергию (11.13) на объем элемента  $V = a^2 \cdot 1$ :

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\tau\gamma. \quad (11.14)$$

Выражая удельную потенциальную энергию только через касательные напряжения с помощью закона Гука (11.7), получим:

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (11.15)$$

### 11.7. Проверка прочности и допускаемые напряжения при чистом сдвиге

При расчетах элементов конструкций, работающих на сдвиг и кручение, важно знать допускаемые касательные напряжения. Ранее было отмечено, что постановка эксперимента на чистый сдвиг осуществляется весьма сложно. В результате получить достоверные данные для опасных напряжений, а, следовательно, и для допускаемых напряжений, тоже сложно. Между тем, существует возможность найти допускаемые величины для касательных напряжений  $[\tau]$  по допускаемым нормальным напряжениям  $[\sigma]$ , исследуя напряженное состояние при чистом сдвиге, с помощью теорий прочности.

Примем для чистого сдвига  $\sigma_1 = \tau$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau$ .

Условие прочности составим по второй, третьей и четвертой теориям:

1. По второй теории

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (11.16)$$

Подставляя значения главных напряжений, получим:

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (11.17)$$

Правая часть формулы (11.17) представляет собой допускаемое напряжение при чистом сдвиге:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (11.18)$$

Для металлов  $\mu = 0,25 \div 0,42$ . Следовательно, по второй теории прочности

$$[\tau] = (0,7 \div 0,8) \cdot [\sigma]. \quad (11.19)$$

2. По третьей теории прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \text{ или } \tau - (-\tau) \leq [\sigma].$$

Откуда

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau]. \quad (11.20)$$

Допускаемое напряжение по третьей теории при чистом сдвиге

$$[\tau] = 0,5[\sigma]. \quad (11.21)$$

3. По четвертой теории прочности

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma].$$

Подставляя значения главных напряжений, получим:

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}. \quad (11.22)$$

Следовательно,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6[\sigma]. \quad (11.23)$$

Следует отметить, что для пластичных материалов при расчете заклепочных, болтовых, сварных соединений обычно используют допускаемое напряжение  $[\tau]$  применяют формулу (11.23), полученную на основании четвертой теории прочности. Если в качестве допускаемого нормального напряжения принять  $[\sigma] = 160$  МПа, то допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 0,6 \cdot 160 = 96$  МПа. Обычно принимают  $[\tau] = 100$  МПа.

Условие прочности на срез имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]. \quad (11.24)$$

## 11.8. Кручение. Крутящий момент. Эпюры крутящих моментов

*Кручением* называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – *крутящий момент*. Все остальные внутренние усилия – нормальная и поперечная силы, изгибающий момент при кручении отсутствуют. Кручение испытывают многие детали машин и сооружений: валы двигателей и станков, оси моторных вагонов и двигателей, элементы пространственных конструкций и т.д. Как показали исследования, характер деформации скручиваемого стержня зависит от формы его поперечного сечения. Особое место среди стержней, подвергаемых кручению, принадлежит стержням с круглым поперечным сечением. Такие стержни, испытывающие кручение, называют валами.

К скручиваемому стержню в разных его сечениях может быть приложено несколько внешних моментов. Рассмотрим случай, когда все внешние моменты взаимно уравновешены и действуют в плоскостях, перпендикулярных оси стержня (Рис.11.9,а):

$$M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0 \quad (11.25)$$

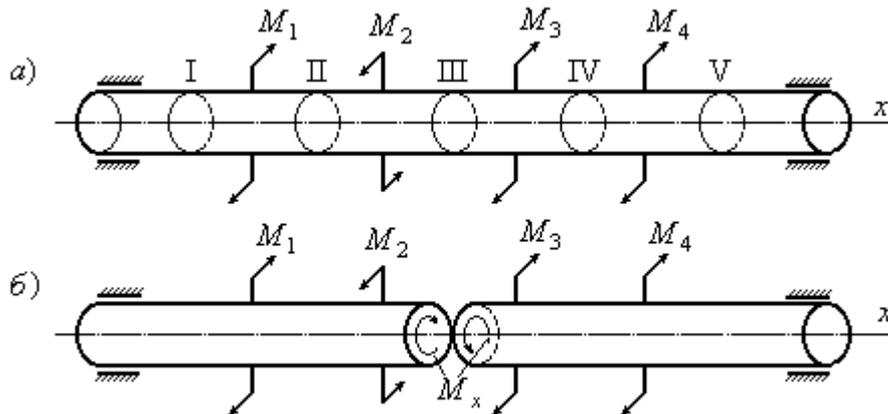


Рис.11.9

Для определения крутящего момента в каком-либо сечении стержня воспользуемся правилом, полученном при использовании метода сечений, изложенном в теме №1. На основании этого правила главный вектор и главный момент всех внутренних сил, действующих в рассматриваемом сечении на оставшуюся часть тела, равняются соответственно главному вектору и главному моменту всех внешних сил, приложенных к отброшенной части тела.

Таким образом, чтобы определить крутящий момент  $M_{кр} = M_x$ , необходимо просуммировать все внешние моменты, действующие по одну сторону от рассматриваемого сечения. Слева от сечения III, в котором определяется крутящий момент, действуют внешние моменты  $M_1$  и  $M_2$ . Следовательно, крутящий момент в сечении III будет равен:

$$M_{кр} = M_x = - M_1 + M_2.$$

Здесь и в дальнейшем при построении эпюр крутящих моментов следует пользоваться следующим правилом знаков: если смотреть на отброшенную часть со стороны сечения, в котором определяется крутящий момент, то при вращении внешним моментом стержня *по часовой стрелке* его следует брать со знаком “минус”, и наоборот – при вращении внешним моментом вала *против часовой стрелки* его следует брать со знаком “плюс”.

Рассмотрим пример построения эпюры крутящих моментов.

**Пример 11.1.** Построить эпюру крутящих моментов для стержня, изображенного на рис.11.10а.

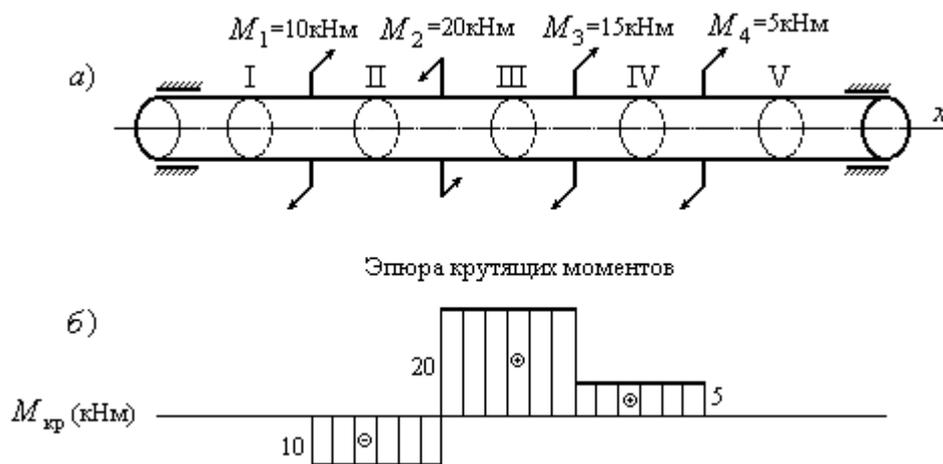


Рис.11.10

Решение:

1. Разобьем вал на участки: I, II, III, IV и V.
2. Пользуясь правилом для определения крутящих моментов, изложенным выше, находим:

$$M_{кр}^I = 0; \quad M_{кр}^{II} = -M_1 = -10 \text{ кНм}; \quad M_{кр}^{III} = -M_1 + M_2 = -10 + 30 = 20 \text{ кНм};$$

$$M_{кр}^{IV} = M_4 = 5 \text{ кНм}; \quad M_{кр}^V = 0.$$

Крутящие моменты на участках I, II, III определялись слева, на участках IV, V - справа.

3. Откладываем полученные моменты от базисной линии и строим эпюру крутящих моментов (Рис.11.10б).

### 11.9. Вывод формул для напряжений и деформаций при кручении валов

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, на поверхности которого нанесена сетка, образованная системой образующих и окружностей, составляющих внешние контуры сечений (Рис.11.11).

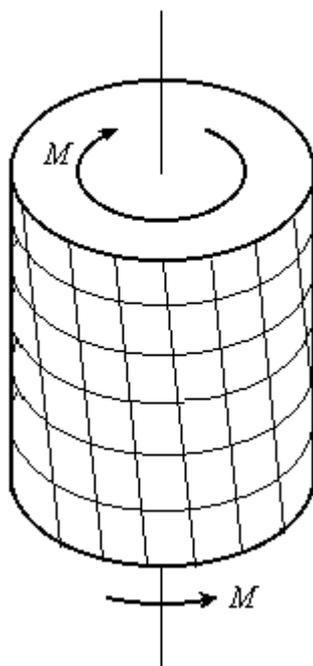


Рис.11.11

Наблюдения показывают, что после закручивания прямоугольники, образованные сеткой, перекашиваются, ось стержня остается прямолинейной, контуры поперечных сечения, круглые и плоские до деформации, не меняют своих очертаний и после деформации. При кручении происходит поворот одного сечения по отношению к другому на угол, называемый углом закручивания. Расстояние между поперечными сечениями практически не меняется, а это указывает на отсутствие продольных деформаций. Если провести прямую линию вдоль радиуса поперечного сечения стержня в торцовом сечении, то в процессе закручивания эта прямая линия не искривляется.

Приведенные наблюдения отражают лишь те деформации, которые происходят на поверхности стержня, но не позволяют делать какие-либо заключения о деформации внутренних волокон. В связи с этим сформулируем ряд гипотез, которые затем положим в основу последующих выводов. Эти гипотезы следующие:

1. Сечения плоские до закручивания, остаются плоскими после закручивания.
2. Радиусы, проведенные мысленно в любом поперечном сечении, в процессе кручения не искривляются.
3. Поперечные сечения, не удаляясь друг от друга в процессе деформации, лишь скользят одно относительно другого, в связи с чем при кручении наблюдается деформация чистого сдвига.

Принятые гипотезы позволяют предположить, что при кручении круглого стержня в результате сдвига возникают только касательные напряжения, а нормальные равны нулю.

Для вывода формулы для касательных напряжений при кручении валов рассмотрим стержень радиуса  $r$ , заделанный одним концом (Рис.11.12), на свободном конце которого приложим пару сил с моментом  $M$ .

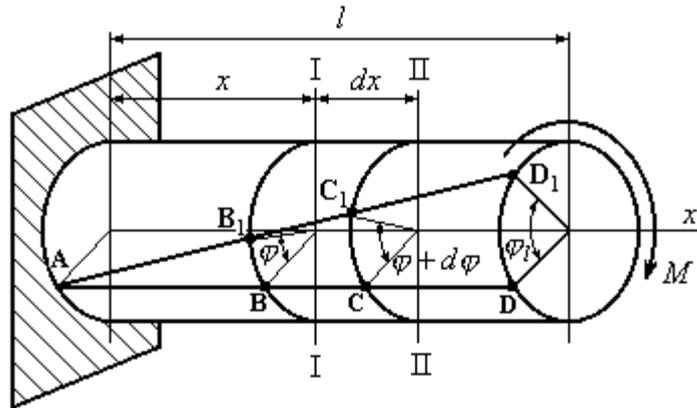


Рис.11.12

На боковой поверхности стержня проведем образующую  $AD$ , которая после кручения займет положение  $AD_1$ . Под действием скручивающего момента  $M$  сечение  $I - I$  повернется на угол  $\varphi$  относительно жесткой заделки. Сечение  $II - II$  повернется на угол  $\varphi + d\varphi$ . Таким образом, взаимный угол поворота сечений  $I - I$  и  $II - II$  составит  $d\varphi$ .

Рассмотрим отдельно элемент стержня длиной  $dx$ . Левое сечение элемента будем считать неподвижным (Рис.11.13). Образующая  $BC$  наклонится на малый угол  $\gamma$  и займет положение  $BC_1$ . Угол сдвига волокна, принадлежащего поверхности вала, найдем из равенства:

$$\gamma = \frac{CC_1}{BC} = \frac{rd\varphi}{dx}.$$

Для произвольного волокна, отстоящего от центра тяжести на расстоянии  $\rho$  угол сдвига будет равен:

$$\gamma = \frac{CC_1}{BC} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx}.$$

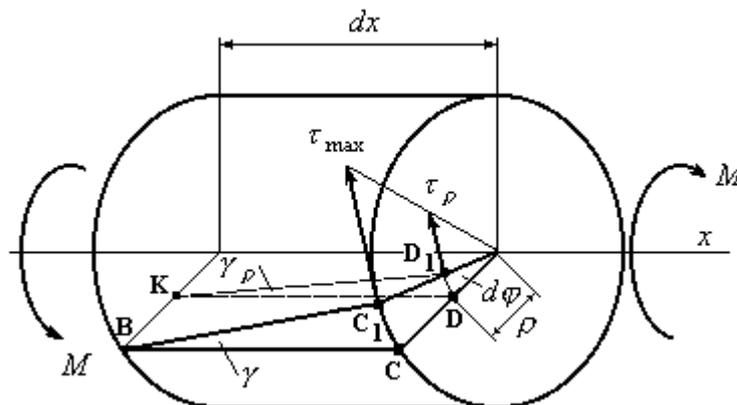


Рис.11.13

Применяя для двух точек  $C_1$  и  $D_1$  закон Гука при сдвиге (11.6), запишем выражения для касательных напряжений:

$$\tau = G\gamma = G \frac{d\varphi}{dx} r; \quad (11.26)$$

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dx} \rho. \quad (11.27)$$

Сравнивая формулы (11.26) и (11.27), приходим к выводу, что касательные напряжения при кручении вала пропорциональны расстоянию от оси вала. Наибольшие напряжения будут в точках, наиболее удаленных от центра тяжести сечения.

Формула (11.27) представляет собой закон изменения касательных напряжений в поперечном сечении вала. На рис.11.14 представлен график изменения касательных напряжений.

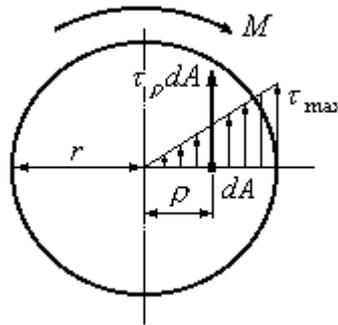


Рис.11.14

Выделим вокруг точки на расстоянии  $\rho$  от центра тяжести площадку  $dA$  и вычислим момент силы, действующей на этой площадке  $\tau_\rho dA$ , относительно оси стержня:

$$dM_{кр} = \tau_\rho dA \cdot \rho.$$

Полный крутящий момент будет равен:

$$M_{кр} = \int_A \tau_\rho dA \cdot \rho. \quad (11.28)$$

Подставляя в формулу (11.28) значение  $\tau_\rho$  из формулы (11.27), получим:

$$M_{кр} = \int_A G \rho^2 \frac{d\varphi}{dx} dA. \quad (11.29)$$

В формуле (11.29) величина  $G \frac{d\varphi}{dx}$  для всех точек поперечного сечения одинакова, поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Под знаком интеграла останется величина  $\int_A \rho^2 dA$ , представляющая собой полярный момент инерции поперечного сечения  $J_p$ . Тогда выражение (11.29) преобразуется к виду:

$$M_{кр} = GJ_p \frac{d\varphi}{dx}$$

или

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{GJ_p}. \quad (11.30)$$

Подставляя выражение для  $\frac{d\varphi}{dx}$  в формулу (11.27), получим:

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр} \rho}{J_p}. \quad (11.31)$$

Выражение (11.31) представляет собой закон распределения касательных напряжений вдоль радиуса сечения и позволяет определить касательное напряжение в любой точке поперечного сечения. При  $\rho=0$ , т.е. в центре тяжести поперечного сечения, касательные напряжения равны нулю.

Максимальные напряжения в сечении возникают в наиболее удаленных точках сечения при  $\rho=r$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} r}{J_p} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \quad (11.32)$$

Выражение (11.31) так же, как и выражение (11.27) устанавливают прямо пропорциональную зависимость величины касательных напряжений от расстояния точки до центра тяжести сечения. Графически этот закон представлен на рис. 11.14.

Величина  $W_p = \frac{J_p}{r}$  называется *полярным моментом сопротивления* круглого сечения при кручении и характеризует *влияние размеров сечения на способность скручиваемого элемента сопротивляться внешним нагрузкам, не разрушаясь*.

Угол закручивания поперечного сечения  $\varphi$  можно определить из формулы (11.30):

$$d\varphi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} dx.$$

Интегрируя это выражение по всей длине стержня, получим:

$$\varphi_l = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GJ_p} dx. \quad (11.33)$$

Если вал имеет постоянный диаметр, а крутящий момент по всей длине стержня не меняется, то после интегрирования выражения (11.33), угол закручивания будет иметь вид:

$$\varphi_l = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}. \quad (11.34)$$

Величина  $GJ_p$  называется жесткостью поперечного сечения вала при кручении и характеризует влияние геометрических размеров поперечного сечения и физических характеристик материала на способность вала сопротивляться закручиванию.

Для ступенчатых стержней или же стержней, у которых крутящий момент меняется по длине скачкообразно, угол закручивания между начальным и конечным сечениями вала определяется как сумма углов закручивания с постоянным отношением  $\frac{M_{кр}}{J_p}$ :

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр}^i l_i}{GJ_p^i}, \quad (11.35)$$

где  $n$  - число участков вала.

Полный угол закручивания не всегда может характеризовать жесткость вала при кручении. Если на протяжении длины вала крутящие моменты имеют разные знаки, то полный угол закручивания может оказаться небольшим, в то время как на отдельных участках угол закручивания может быть значительным. В связи с этим для оценки жесткости скручиваемого стержня применяется другая мера – *относительный угол закручивания*

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_p}. \quad (11.36)$$

Размерность относительного угла закручивания  $\text{см}^{-1}$  или  $\text{м}^{-1}$ .

### 11.10. Потенциальная энергия при кручении. Анализ напряженного состояния при кручении

При упругих деформациях потенциальная энергия деформации  $U$ , накапливаемая в вале, численно равна работе внешних  $A_p$ :

$$U = A_p. \quad (11.37)$$

Работа внешних сил  $A_p$  по теореме Клапейрона (7.7) при кручении равна:

$$A_p = \frac{1}{2} M_{кр} \varphi, \quad (11.38)$$

где  $M_{кр}$  - крутящий момент, вызванный действием внешнего момента  $M$ . Подставляя значение для работы внешних сил  $A_p$  в формулу (11.37) и учитывая, что  $\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}$ , получим:

$$U = \frac{M_{кр}^2 l}{2GJ_p} = \frac{\varphi^2 GJ_p}{2l}. \quad (11.39)$$

Формулой (11.39) можно пользоваться при ступенчатом изменении крутящих моментов и жесткости вала. Потенциальная энергия в этом случае будет равна сумме потенциальных энергий, найденных на каждом участке с постоянным отношением  $\frac{M_{кр}}{J_p}$ .

Как следует из выражений (11.27) и (11.31), а также из рис.11.14, касательные напряжения, меняясь по величине вдоль радиуса, остаются ему перпендикулярны. На основании закона парности касательных напряжений они возникают также и в продольных сечениях (Рис.11.15).

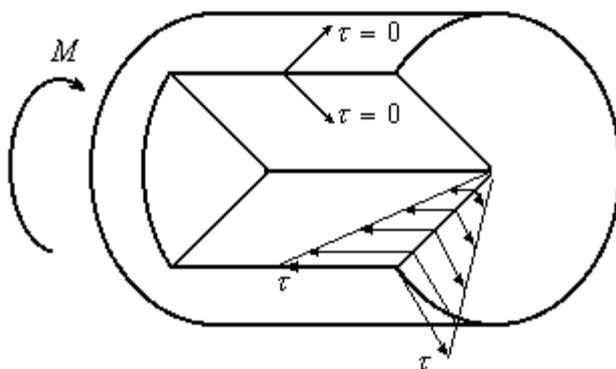


Рис.11.15

Нормальные напряжения как в поперчных, так и в продольных сечениях равны нулю. Вдоль радиуса касательные напряжения также отсутствуют. Таким образом, на двух взаимно перпендикулярных площадках, одна из которых находится в плоскости поперечного сечения, а другая в плоскости продольного диаметрального сечения, действуют только касательные напряжения. Такое напряженное состояние называется чистым сдвигом. Как

известно, при чистом сдвиге в площадках, наклоненных к площадкам чистого сдвига под углом  $45^\circ$ , в данном случае под углом  $45^\circ$  к оси вала, действуют главные растягивающие и сжимающие нормальные напряжения. Траектория этих напряжений представляет винтовую линию, наклоненную под углом  $45^\circ$  к образующей (Рис.11.16).

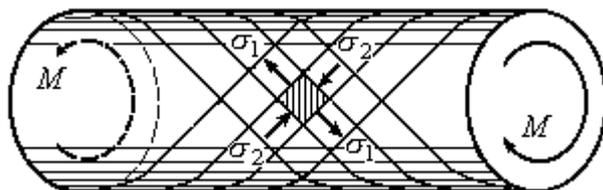


Рис.11.16

По величине главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  во всех точках сечения равны касательным напряжениям  $\tau$ . Подобное действие нормальных напряжений вызывает разрушение материалов, находящихся в хрупком состоянии, по винтовой линии, так как хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению.

### 11.11. Условия прочности и жесткости при кручении валов. Примеры расчета валов

Расчет валов на прочность, как правило, выполняют по допускаемым напряжениям. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (11.40)$$

Допускаемое напряжение  $[\tau]$  определяется в соответствии с методикой, изложенной в разделе 11.7 настоящей темы.

Условие прочности (11.40) позволяет решать три задачи:

1. Первая задача состоит в проверке напряжений при заданном моменте и известном диаметре вала.
2. Вторая задача заключается в определении допускаемой величины для момента при заданном диаметре вала и известном допускаемом напряжении.
3. Третья задача, наиболее важная, является задачей проектировочного расчета: при заданном моменте и допускаемом напряжении необходимо найти диаметр вала.

Прежде, чем перейти к решению третьей задачи, запишем формулы, в которых полярный момент инерции и полярный момент сопротивления выражены через диаметр вала.

Полярный момент инерции для сплошного сечения вала был определен в теме №4, формула (4.15):

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} .$$

Для полого вала (кольцевое сечение) с внешним диаметром  $D$  и внутренним  $d$ :

$$J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4),$$

где 
$$\alpha = \frac{d}{D} .$$

Полярный момент сопротивления для сплошного сечения найдем из формулы:

$$W_p = \frac{J_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} .$$

Для кольцевого сечения полярный момент сопротивления будет равен:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) .$$

Теперь диаметр сплошного вала может быть найден из условия прочности следующим образом:

$$W_p = \frac{M_{кр}}{[\tau]} , \quad \text{откуда} \quad d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}} .$$

Для вала кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) , \quad \text{откуда} \quad D = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi(1 - \alpha^4)[\tau]}} .$$

Кроме расчета на прочность, валы рассчитывают также на жесткость. Условие жесткости имеет вид:

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \leq [\theta] , \quad (11.41).$$

где  $\theta$  - относительный угол закручивания;  $[\theta]$  - допускаемый относительный угол закручивания вала в радианах деленных на метр, нормируемый техническими условиями.

Диаметр сплошного вала из условия жесткости (11.41) при  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  будет равен:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi[\theta]}}.$$

Для кольцевого сечения  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4)$ . Поэтому

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi(1 - \alpha^4)[\theta]}}.$$

Таким образом, для одного и того же вала диаметр определяется дважды: один раз – из условия прочности, второй – из условия жесткости. Из двух полученных размеров берется больший.

Величина внешнего скручивающего момента не всегда задается непосредственно. Часто приходится определять момент  $M$  по числу оборотов вала в минуту  $n$  и мощности машины, вращающей вал, выраженной в лошадиных силах или в киловаттах.

Мощность представляет собой работу в единицу времени (секунду), которая равна работе внешнего момента  $A_p = M\alpha$ , где  $\alpha$  – угол, на который повернется шкив за одну секунду.

За одну секунду шкив совершит  $\frac{n}{60}$  оборотов, следовательно,  $\alpha = \frac{2\pi n}{60}$ . Работу на этом угле поворота найдем из формулы:

$$A_p = M \frac{\pi n}{30} \text{ (кНм/сек)}.$$

С другой стороны

$$A_p = 75N \text{ (кНм/сек)},$$

где  $N$  – мощность в лошадиных силах.

Приравняв эти два выражения, найдем:

$$M = 7,162 \frac{N}{n} \text{ (кНм)}. \quad (11.42)$$

Учитывая, что одна л.с. равна 0,736 кВт и выражая внешний момент через мощность  $K$ , заданную в киловаттах, получим:

$$M = 9,736 \frac{K}{n} \text{ (кНм)}. \quad (11.43)$$

**Пример 11.2.** Стержень круглого поперечного сечения длиной  $l = 20$  см и диаметром  $d = 4$  см скручивается моментом  $M = 2$  кНм.

Определить:

1. Касательное напряжение в точке поперечного сечения стержня, отстоящей на расстоянии 1 см от центра тяжести сечения.
2. Найти максимальный угол закручивания стержня. Материал стержня – сталь ( $G = 8,0 \cdot 10^4$  МПа).

Решение:

1. Крутящий момент в вале будет равен внешнему моменту

$$M_{кр} = M = 2 \text{ кНм.}$$

2. Касательное напряжение в любой произвольной точке сечения вала можно определить по формуле (11.31):

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр} \rho}{J_p} = \frac{2,0 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}}{\frac{\pi \cdot 4^4}{32} 10^{-8}} 10^{-6} = 79,58 \text{ МПа.}$$

3. Максимальный угол закручивания вала найдем по формуле (11.34):

$$\varphi_l = \frac{M_{кр} l}{G J_p} = \frac{2,0 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{8,0 \cdot 10^{10} \frac{\pi \cdot 4^4}{32} 10^{-8}} = 1,989 \cdot 10^{-2} \text{ (1/м).}$$

**Пример 11.3.** Вал скручивается моментом  $M = 3$  кНм. Допускаемое напряжение  $[\tau] = 50$  МПа. Допускаемый угол закручивания  $[\theta] = 5,0 \cdot 10^{-3}$  рад/м. Модуль сдвига  $G = 8,0 \cdot 10^4$  МПа. Определить диаметр вала.

Решение:

1. Из условия прочности (11.40) находим:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3,0 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50,0 \cdot 10^6}} = 6,73 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 67,3 \text{ мм.}$$

3. Из условия жесткости (11.36):

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}}{G \pi [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3,0 \cdot 10^3}{8,0 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3}}} = 9,35 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 93,5 \text{ мм.}$$

4. Из двух полученных диаметров берем больший, т.е.

$$d = 93,5 \text{ мм.}$$

**Пример 11.4.** Определить диаметр вала кольцевого сечения, если передаваемая валом мощность  $K = 300 \text{ кВт}$ . Число оборотов вала в минуту  $n = 150$ . Допускаемые напряжения  $[\tau] = 25 \text{ МПа}$ . Допускаемый угол закручивания  $[\theta] = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ (1/м)}$ . Модуль сдвига  $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Отношение диаметров  $\alpha = \frac{d}{D} = 0,5$ .

Решение:

1. Момент, передаваемый на вал, определим по формуле (11.43):

$$M = 9,736 \frac{K}{n} = 9,736 \frac{300}{150} = 19,472 \text{ (кНм)}.$$

2. Определяем диаметр  $D$  из условия прочности:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 19,472 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (1 - 0,5^4) \cdot 25,0 \cdot 10^6}} = 16,17 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 161,7 \text{ мм.}$$

4. Находим диаметр  $D$  из условия жесткости:

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{G\pi(1-\alpha^4)[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 19,472 \cdot 10^3}{8,0 \cdot 10^{10} (1 - 0,5^4) \cdot 5,0 \cdot 10^{-3}}} = 20,2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 202 \text{ мм.}$$

5. Берем большее значение:  $D = 202 \text{ мм}$ ;  $d = 0,5D = 101 \text{ мм}$ .

**Пример 11.5.** Как отличается несущая способность двух стержней круглого поперечного сечения при кручении (Рис.11.17), если для первого стержня  $[\tau] = 50 \text{ МПа}$ , а для второго -  $[\tau] = 5 \text{ МПа}$ .

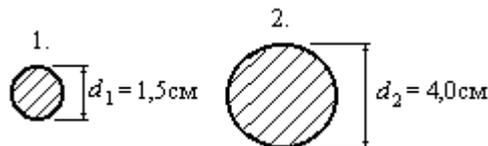


Рис.11.17

Решение:

1. Из условия прочности (11.40) найдем величину крутящего момента для первого сечения:

$$M_{\text{кр}}^{(1)} = W_p^{(1)} [\tau]^{(1)} = \frac{\pi \cdot d_1^3}{16} [\tau]^{(1)} = \frac{3,14 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2})^3}{16} 50 \cdot 10^6 = 33,134 \text{ Нм.}$$

2. Из условия прочности найдем величину крутящего момента для второго сечения:

$$M_{\text{кр}}^{(2)} = W_p^{(2)} [\tau]^{(2)} = \frac{\pi \cdot d_2^3}{16} [\tau]^{(2)} = \frac{3,14 \cdot (4,0 \cdot 10^{-2})^3}{16} 5,0 \cdot 10^6 = 62,8 \text{ Нм.}$$

3. Сравнивая моменты для первого и второго сечения, приходим к выводу, что у второго сечения несущая способность

$$\text{в } \frac{M_{\text{кр}}^{(2)}}{M_{\text{кр}}^{(1)}} = \frac{62,8}{33,134} \approx 1,9 \text{ раза больше.}$$

**Пример 11.6.** Как отличаются жесткости двух стержней круглого поперечного сечения при кручении (Рис.11.17), если для первого стержня модуль упругости  $G = 12 \cdot 10^4$  МПа, а для второго -  $G = 2 \cdot 10^4$  МПа.

Решение:

1. Находим жесткость для первого сечения:

$$G^{(1)} J_p^{(1)} = G^{(1)} \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} = 12,0 \cdot 10^{10} \frac{3,14 \cdot (1,5 \cdot 10^{-2})^4}{32} 10^{-8} = 5,964 \cdot 10^{-6} \text{ (Нм}^2\text{)}.$$

2. Находим жесткость для второго сечения:

$$G^{(2)} J_p^{(2)} = G^{(2)} \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = 2,0 \cdot 10^{10} \frac{3,14 \cdot (4,0 \cdot 10^{-2})^4}{32} 10^{-8} = 50,256 \cdot 10^{-6} \text{ (Нм}^2\text{)}.$$

3. Сравнивая жесткости для первого и второго сечения, приходим к выводу, что у второго сечения жесткость

$$\text{в } \frac{G^{(2)} J_p^{(2)}}{G^{(1)} J_p^{(1)}} = \frac{50,256 \cdot 10^{-6}}{5,964 \cdot 10^{-6}} = 8,43 \text{ раза больше.}$$

## 11.12. Кручение стержней некруглого поперечного сечения

При кручении стержней с некруглым сечением не выполняются те допущения, которые были приняты при кручении стержней круглого сечения.

В частности, не выполняется гипотеза плоских сечений. Отдельные точки сечения перемещаются вдоль оси стержня, сечение перестает быть плоским. Происходит явление, которое называется *депланацией* сечения. Точные расчеты стержней некруглого сечения получают методами теории упругости. Здесь приводятся некоторые окончательные результаты. На рис.11.18 для стержня прямоугольной формы показано распределение касательных напряжений по главным осям и по диагонали. В угловых точках напряжения равны нулю. Наибольшее касательное напряжение возникает в середине длинной стороны (точка 1). Это напряжение равно

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}}, \quad (11.44)$$

где  $W_{\text{к}} = chb^2$  - момент сопротивления при кручении.

Зная  $\tau_{\max}$ , можно определить напряжение в точке №2:

$$\tau_2 = \gamma \tau_{\max}. \quad (11.45)$$

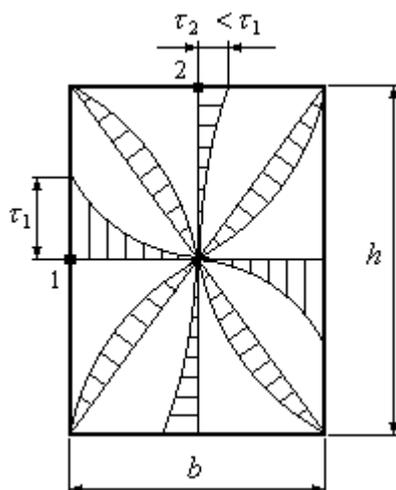


Рис.11.18

Полный и относительный угол закручивания найдем соответственно по формулам:

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GJ_{\text{к}}}; \quad (11.46)$$

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{к}}}, \quad (11.47)$$

где  $J_{\text{к}} = \beta hb^3$  - момент инерции при кручении.

Входящие в эти формулы коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  зависят от отношения стороны прямоугольника  $m = \frac{h}{b}$ . Для некоторых значений  $m$  величины  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  приведены в таблице 11.1.

Таблица 11.1

$m$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1,0	0,859	-	0,795	-	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Условия прочности и жесткости для прямоугольного сечения принимают вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{\alpha h b^2} \leq [\tau]; \quad (11.48)$$

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{\beta h b^3 G} \leq [\theta]. \quad (11.49)$$

Мы рассмотрели распределение касательных напряжений в пределах прямоугольного сечения и получили условия прочности и жесткости для сечения прямоугольной формы. Если необходимо привести расчет незамкнутых сечений более сложного профиля, например, состоящих из нескольких прямоугольников, в этом случае сложную фигуру разбивают на несколько простых и определяют момент инерции при кручении  $J_{\text{к}}$  путем суммирования моментов инерции отдельных фигур:

$$J_{\text{к}} = J_{\text{к}}^{(1)} + J_{\text{к}}^{(2)} + J_{\text{к}}^{(3)} + \dots + J_{\text{к}}^{(n)} = \sum J_{\text{к}}^{(i)}, \quad (11.50)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  - номера простых частей, на которые разбито сечение.

Так как угол закручивания для всего сечения и всех его частей один и тот же:

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GJ_{\text{к}}} = \frac{M_{\text{кр}}^{(1)}}{GJ_{\text{к}}^{(1)}} = \frac{M_{\text{кр}}^{(2)}}{GJ_{\text{к}}^{(2)}} = \dots = \frac{M_{\text{кр}}^{(n)}}{GJ_{\text{к}}^{(n)}},$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сечения пропорционально их жесткостям:

$$M_{\text{кр}}^{(1)} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}}^{(1)}}{J_{\text{к}}}; \quad M_{\text{кр}}^{(2)} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}}^{(2)}}{J_{\text{к}}}; \quad \dots; \quad M_{\text{кр}}^{(n)} = M_{\text{кр}} \frac{J_{\text{к}}^{(n)}}{J_{\text{к}}}.$$

Наибольшее касательное напряжение для  $i$ - части сечения найдем по формуле (11.44):

$$\tau_{\kappa}^{(i)} = \frac{M_{\text{кр}}^{(i)}}{W_{\kappa}^{(i)}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\kappa}} \left( \frac{J_{\kappa}^{(i)}}{J_{\kappa}} \right) = \frac{M_{\text{кр}}}{J_{\kappa}} \left( \frac{J_{\kappa}^{(i)}}{W_{\kappa}^{(i)}} \right).$$

Наибольшее касательное напряжение возникнет в том элементе, у которого отношение значений  $\frac{J_{\kappa}^{(i)}}{W_{\kappa}^{(i)}}$  будет максимальным:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{J_{\kappa}} \left( \frac{J_{\kappa}^{(i)}}{W_{\kappa}^{(i)}} \right)_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\kappa}} \quad , \quad (11.51)$$

где

$$W_{\kappa} = \frac{J_{\kappa}}{\left( \frac{J_{\kappa}^{(i)}}{W_{\kappa}^{(i)}} \right)_{\text{max}}} . \quad (11.52)$$

Кручение стержней иного профиля (трапецевидного, эллиптического и др.) подробно изложено в учебной [1,2,4] и справочной литературе [3]. Там же приведены и примеры расчета на кручение стержней, имеющих сложное поперечное сечение.

### 11.13. Расчет винтовых цилиндрических пружин с малым шагом витка

Винтовые цилиндрические пружины получили широкое распространение в машиностроении. В рессорах вагонов, в клапанах и других деталях механизмов применяются винтовые пружины, подвергающиеся действию сил, сжимающих или растягивающих пружину.

Точный расчет на прочность винтовых пружин достаточно сложен, так как проволока винтовой пружины может испытывать одновременно кручение, сдвиг и изгиб. Однако при малых углах наклона витков влиянием изгиба можно пренебречь. Рассмотрим теорию расчета винтовых цилиндрических пружин с малым шагом витка (Рис.11.19,а), у которых шаг витка  $h$  значительно меньше радиуса  $R$  витка пружины ( $h < \frac{1}{5}R$ ). Угол наклона витка такой пружины к плоскости перпендикулярной оси пружины, мал и поэтому можно принять, что витки лежат в этой плоскости.

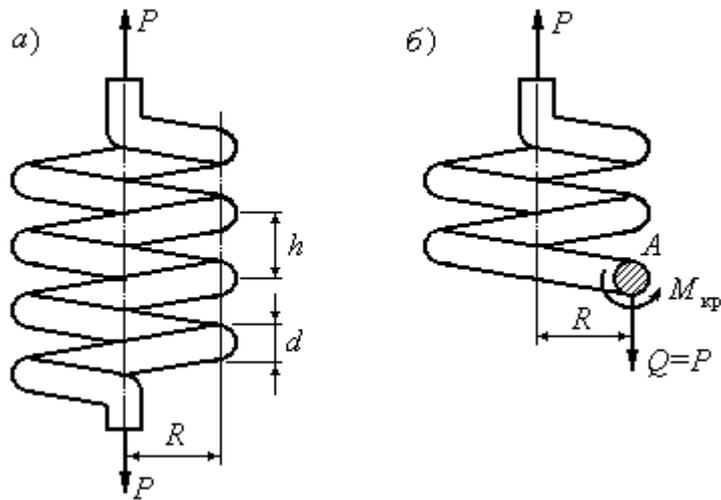


Рис.11.19

Обозначим  $D, R$  - средний диаметр и радиус витка пружины,  $d$  - диаметр проволоки, из которой изготовлена пружина,  $h$  - шаг витка,  $n$  - число витков пружины. Рассечем пружину на две части (Рис.11.19б). Отбрасывая нижнюю часть пружины, заменим ее действие на верхнюю поперечной силой  $Q=P$  и крутящим моментом  $M_{кр} = PR$ .

Анализируя расчетную схему пружины, приведенную на рис (11.19,б), приходим к выводу, что цилиндрическая пружина с малым шагом витка работает на срез и кручение (Рис.11.20,а).

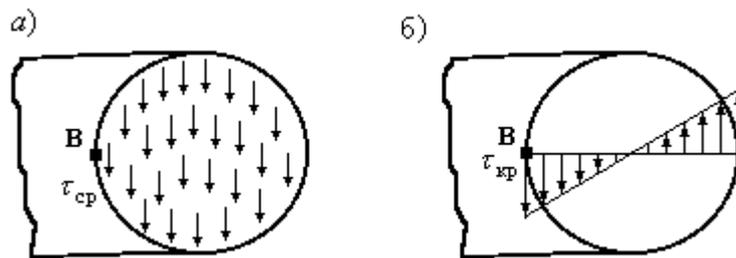


Рис.11.20

Предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по сечению витка пружины, найдем их из выражения (Рис.11.21,а):

$$\tau_{ср} = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}.$$

Наибольшие касательные напряжения от кручения (Рис.11.20,б) возникают в наиболее удаленных точках от центра тяжести и равны:

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3}.$$

Максимальные касательные напряжения действуют на внутренней поверхности витка пружины в точке В, так как в этой точке они направлены в одну сторону:

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{кр}} + \tau_{\text{ср}} = \frac{16PR}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (11.53)$$

Второе слагаемое  $\frac{d}{4R}$  в формуле (11.53) для пружин с малым шагом витка существенно меньше единицы. Поэтому им можно пренебречь. И тогда условие прочности принимает вид:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (11.54)$$

Определим осадку пружины  $\lambda$  без учета среза пружины. Для вывода воспользуемся теоремой Клапейрона (7.7), в соответствии с которой работа внешней силы  $P$  на перемещении  $\lambda$  равна:

$$A_p = \frac{1}{2} P \lambda.$$

Потенциальная энергия деформации в пружине при кручении численно равна работе внешней силы:

$$U = A_p = \frac{M_{\text{кр}}^2 l}{2GJ_p}. \quad (11.55)$$

Принимая во внимание, что длина пружины  $l = 2\pi Rn$ , а полярный момент инерции проволоки в витке пружины  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , и подставляя в формулу (11.55), получим выражение для осадки пружины:

$$\lambda = \frac{64PR^3 n}{Gd^4}. \quad (11.56)$$

**Пример 11.7.** Винтовая пружина растягивается силой  $P = 0,1$  кН. Средний радиус пружины  $R = 70$  мм. Диаметр проволоки  $d = 10$  мм. Количество витков  $n = 20$ : модуль сдвига  $G = 8,0 \cdot 10^4$  МПа. Определить осадку пружины и наибольшие касательные напряжения.

Решение:

1. Осадку пружины определим по формуле (11.56):

$$\lambda = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 0,1 \cdot 10^3 \cdot (70,0 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 20}{8,0 \cdot 10^{10} (10,0 \cdot 10^{-3})^4} = 54,88 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 54,88 \text{ мм}.$$

2. Находим максимальные касательные напряжения без учета среза:

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 0,1 \cdot 10^3 \cdot 70,0 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (10,0 \cdot 10^{-3})^3} \cdot 10^{-6} = 35,65 \text{ МПа}.$$

3. Определяем максимальные касательные напряжения на внутренней поверхности витка пружины с учетом среза по формуле (11.53):

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right) = \frac{16 \cdot 0,1 \cdot 10^3 \cdot 70,0 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (10,0 \cdot 10^{-3})^3} \left( 1 + \frac{(10,0 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot 70,0 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot 10^{-6} = 36,92 \text{ МПа}.$$

4. Сравнивая величину касательных напряжений, полученных без учета влияния среза, и с учетом влияния среза, приходим к выводу, что эти напряжения отличаются друг от друга на  $\Delta\tau = 36,92 - 35,65 = 1,27$  МПа или на

$$\delta = \frac{1,27}{36,92} 100\% = 3,45\%.$$

Такая погрешность находится в пределах, установленных нормами для инженерных расчетов.

#### 11.14. Определение объема пружины, необходимого для поглощения заданной величины энергии

Как известно, пружины служат для выполнения демпфирующих функций. При проектировании пружин за основу принимают величину энергии  $T$ , которую должна поглощать пружина во время эксплуатации. При этом исходят из того, что между осадкой пружины  $\lambda$  и силой  $P$ , действующей на нее, имеется прямолинейная зависимость. Как уже упоминалось выше, потенциальная энергия численно равна работе внешней силы на вызванных ею перемещениях:

$$U = \frac{1}{2} P\lambda = \frac{32P^2 R^3 n}{Gd^4}.$$

Крутящий момент, выраженный через максимальные касательные напряжения при условии, что пружина работает только на кручение, может быть записан так:

$$M_{\text{кр}} = PR = \frac{\tau_{\text{max}} \pi d^3}{16}.$$

Теперь потенциальную энергию тоже можно выразить через максимальные касательные напряжения:

$$U = \frac{2\pi Rn}{4G} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tau_{\text{max}}^2.$$

Учитывая, что  $2\pi Rn$  - длина проволоки пружина, а  $\frac{\pi d^2}{4}$  - площадь сечения проволоки, объем пружины равен:

$$V = 2\pi Rn \frac{\pi d^2}{4}.$$

И тогда потенциальная энергия деформации принимает вид:

$$U = \frac{\tau_{\text{max}}^2 V}{4G}. \quad (11.57)$$

Задаваясь предельной величиной касательного напряжения  $\tau_{\text{max}} = [\tau]$ , вычислим объем пружины, необходимый для поглощения заданной величины энергии  $T$ , с тем, чтобы не было превышения допускового напряжения:

$$T = U = \frac{[\tau]^2}{4G} V,$$

откуда

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \quad (11.58)$$

При конструировании пружины по заданному объему, следует выбрать ее размеры  $(R, d, n)$  с таким расчетом, чтобы при проверке осадки пружины зазоры между витками не закрывались.

При выводе формулы (11.58) попутно была получена формула для определения максимальных касательных напряжений при кручении при известном уровне сообщенной телу кинетической энергии  $T$ , например, при ударе:

$$\tau_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{GT}{Al}}. \quad (11.59)$$

Здесь  $A$  - площадь поперечного сечения стержня;  $l$  - длина стержня.

Отметим, что в настоящей теме были рассмотрен расчет только цилиндрических пружин с малым шагом витка. Все же остальные пружины (конические, призматические, бочкообразные, с переменным шагом витка, с сечением витка в виде прямоугольной формы и т.п.) рассчитываются достаточно сложно. В связи с этим методы расчета таких пружин в настоящем пособии не приводятся.

### 11.5. Тесты к теме №11 “Сдвиг. Кручение”

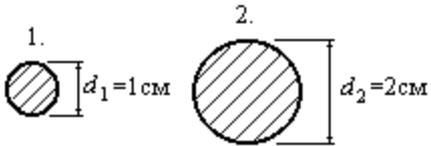
№	Вопрос	Время на ответ, сек
1	Какой вид деформации называется сдвигом?	40
	1. Вид деформации, при котором в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент.	
	2. Вид деформации, при котором в поперечных сечениях возникает только крутящий момент.	
	3. Вид деформации, при котором в поперечных сечениях возникает только поперечная сила.	
	4. Вид деформации, при котором в поперечных сечениях возникает только продольная сила.	
2	Какие напряжения возникают в поперечных сечениях при чистому сдвиге?	40
	1. Нормальные.	
	2. Касательные.	
	3. Нормальные и касательные.	
3	Какие деформации возникают в поперечных сечениях при чистому сдвиге?	40
	1. Угловые.	
	2. Линейные.	
	3. Угловые и линейные.	
4	Между какой деформацией и какими напряжениями устанавливает связь закон Гука при чистом сдвиге?	40
	1. Относительным сдвигом и нормальными напряжениями.	
	2. Относительным удлинением и касательными напряжениями.	
	3. Относительным удлинением и нормальными напряжениями.	

	4. Относительным сдвигом и касательными напряжениями.	
5	Что из себя представляет коэффициент пропорциональности в законе Гука при чистом сдвиге?	40
	1. Модуль упругости второго рода $G$ .	
	2. Модуль упругости первого рода $E$ .	
	3. Модуль упругости объемной деформации $K$ .	
	4. Модуль Юнга.	
6	Какое из выражений определяет связь модулей упругости первого и второго рода.	60
	1. $G = \frac{2E}{1 + \mu}$	
	2. $E = \frac{1 + \mu}{2G}$	
	3. $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$	
	4. $E = \frac{G}{2(1 + \mu)}$	
7	Какая существует связь между относительной продольной деформацией $\varepsilon$ и относительным сдвигом $\gamma$ при чистом сдвиге?	60
	1. $\varepsilon = 2\gamma$	
	2. $\varepsilon = \gamma$	
	3. $\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma$	
	4. $\varepsilon = \frac{1}{3}\gamma$	
8	Как определить величину абсолютного сдвига?	60
	1. $\Delta s = \frac{Qa}{EA}$	
	2. $\Delta s = \frac{Na}{GA}$	
	3. $\Delta s = \frac{QA}{Ga}$	
	4. $\Delta s = \frac{Qa}{GA}$	
9	Как выглядит выражение для потенциальной энергии деформации при чистом сдвиге?	60
	1. $U = \frac{Qa}{2GA}$	
	2. $U = \frac{Q^2 a}{2GA}$	
	3. $U = \frac{Q^3 a}{2GA}$	

	4.	$U = \frac{Q^2 a}{2EA}$	
10	Как выглядит выражение для удельной потенциальной энергии деформации при чистом сдвиге?		60
	1.	$u = \frac{\tau \gamma}{G}$	
	2.	$u = \frac{\tau^2}{G}$	
	3.	$u = \frac{\tau^2}{2E}$	
	4.	$u = \frac{\tau^2}{2G}$	
11	Какое напряженное состояние возникает при чистом сдвиге?		40
	1. Объемное.		
	2. Плоское.		
	3. Линейное.		
12	В соответствии с какой из классических теорий прочности $[\tau] = 0,5[\sigma]$ ?		60
	1. Теорией наибольших нормальных напряжений.		
	2. Теорией наибольших линейных деформаций.		
	3. Теорией наибольших касательных напряжений.		
	4. Энергетической теорией.		
13	В соответствии с какой из классических теорий прочности $[\tau] = 0,6[\sigma]$ ?		60
	1. Теорией наибольших нормальных напряжений.		
	2. Теорией наибольших линейных деформаций.		
	3. Теорией наибольших касательных напряжений.		
	4. Энергетической теорией.		
14	Какой из внутренних силовых факторов возникает при кручении стержней?		40
	1. Продольная сила.		
	2. Поперечная сила.		
	3. Изгибающий момент.		
	4. Крутящий момент.		
15	Какой из стержней, испытывающий кручение, называется валом?		30
	1. Стержень с прямоугольным поперечным сечением.		
	2. Стержень с треугольным поперечным сечением		
	3. Стержень с круглым поперечным сечением.		
	4. Стержень с квадратным поперечным сечением.		

16	Какая из гипотез заложена в теории кручения стержней с круглым поперечным сечением?	40
	1. Гипотеза про преимущественное влияние какого-либо фактора на критерий прочности вала.	
	2. Гипотеза про естественную ненапряженность тела .	
	3. Гипотеза плоских сечений.	
	4. Гипотеза сплошности.	
17	Какой вид деформации возникает при кручении стержней с круглым поперечным сечением?	40
	1. Растяжение.	
	2. Чистый изгиб.	
	3. Чистый сдвиг.	
	4. Сжатие.	
18	Какие напряжения возникают в поперечных сечениях при кручении стержней?	40
	1. Нормальные.	
	2. Касательные.	
	3. Нормальные и касательные.	
19	Как выглядит закон распределения касательных напряжений в пределах поперечного сечения вала, испытывающего кручение?	60
	1. $\tau_{\rho} = \frac{Q}{A}$	
	2. $\tau_{\rho} = \frac{My}{I_z}$	
	3. $\tau_{\rho} = \frac{M_{кр} \rho}{I_z}$	
	4. $\tau_{\rho} = \frac{M_{кр} \rho}{I_p}$	
20	Какой из формул следует пользоваться для определения максимальных касательных напряжений при кручении валов?	60
	1. $\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{I_p}$	
	2. $\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{A}$	
	3. $\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{W_z}$	
	4. $\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{W_p}$	

21	Каким фактором является полярный момент сопротивления поперечного сечения вала при кручении $W_p$ ?	40
	1. Физическим фактором жесткости.	
	2. Физическим фактором прочности.	
	3. Геометрическим фактором прочности.	
	4. Геометрическим фактором жесткости.	
22	Какое из приведенных выражений является условием прочности валов при кручении?	60
	1. $\tau_{\max} = \frac{Q}{A} \leq [\tau]$	
	2. $\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$	
	3. $\tau_{\max} = \frac{ M_{\max}^{\text{кр}} }{W_p} \leq [\tau]$	
	4. $\tau_{\max} = \frac{ M_{\max}^{\text{кр}} }{GI_p} \leq [\tau]$	
23	Какое из приведенных выражений является условием жесткости валов при кручении?	60
	1. $\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GA} \leq [\theta]$	
	2. $\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_z} \leq [\theta]$	
	3. $\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \leq [\theta]$	
	4. $\theta_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{GW_p} \leq [\theta]$	
24	Как определить величину крутящего момента, если $N$ - мощность в лошадиных силах, а $n$ - число оборотов вала в минуту?	40
	1. $M = 7,162 \frac{n}{N}$ (кНм)	
	2. $M = 9,736 \frac{n}{N}$ (кНм)	
	3. $M = 9,736 \frac{N}{n}$ (кНм)	
	4. $M = 7,162 \frac{N}{n}$ (кНм)	
25	Как определить величину крутящего момента, если $N$ - мощность в киловаттах, а $n$ - число оборотов вала в минуту?	40

	1.	$M = 7,162 \frac{n}{K} \text{ (кНм)}$	
	2.	$M = 9,736 \frac{n}{K} \text{ (кНм)}$	
	3.	$M = 9,736 \frac{K}{n} \text{ (кНм)}$	
	4.	$M = 7,162 \frac{K}{n} \text{ (кНм)}$	
26	Брус круглого поперечного сечения длиной 16см и диаметром 2см скручивается моментом $M = 0,08 \text{ кНм}$ . Определить максимальный угол закручивания. Материал бруса – сталь ( $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ).		240
27	Брус круглого поперечного сечения диаметром 2см скручивается моментом $M = 0,04 \text{ кНм}$ . Чему равняется касательное напряжение (в МПа) в точке поперечного сечения на расстоянии 0,4см от центра тяжести сечения?		180
28	<p>Как отличаются жесткости двух стержней при кручении, поперечные сечения которых приведены на рисунке, если для первого стержня <math>G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}</math> (сталь), а для второго - <math>G = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}</math> (свинец)?</p> 		180
	1. Одинаковая.		
	2. В 2 раза.		
	2. В 4 раза.		
	4. В 8 раз.		
29	<p>Как отличаются несущие способности двух стержней при кручении, поперечные сечения которых приведены на рисунке, если для первого стержня <math>[\tau] = 40 \text{ МПа}</math>, а для второго - <math>[\tau] = 5 \text{ МПа}</math> ?</p>		180
	1. В 4 раза.		
	2. В 2 раза.		
	3. Одинаковая.		
	4. В 8 раз.		
30	Как выглядит выражение для потенциальной энергии деформаций вала при кручении?		60
	1.	$U = \frac{M_{кр} l}{2GI_p}$	
	2.	$U = \frac{2M_{кр} l}{GI_p}$	

	3.	$U = \frac{M_{кр}^2 l}{2GI_p}$	
	4.	$U = \frac{M_{кр}^3 l}{2GI_p}$	
31	Какая из гипотез, которая выполнялась при кручении стержней с круглым поперечным сечением, перестает выполняться при кручении стержней некруглого сечения?		40
	1. Гипотеза про преимущественное влияние какого-либо фактора на критерий прочности вала.		
	2. Гипотеза про естественную ненапряженность тела .		
	3. Гипотеза плоских сечений.		
	4. Гипотеза сплошности.		
32	Как выглядит условие прочности при кручении стержней прямоугольного поперечного сечения?		60
	1.	$\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{abh^2} \leq [\tau]$	
	2.	$\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{ahb^2} \leq [\tau]$	
	3.	$\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{\beta hb^3 G} \leq [\tau]$	
	4.	$\tau_{max} = \frac{ M_{max}^{кр} }{\beta hb^2} \leq [\tau]$	
33	Как выглядит условие жесткости при кручении стержней прямоугольного поперечного сечения?		60
	1.	$\theta = \frac{M_{кр}}{Gabh^2} \leq [\theta]$	
	2.	$\theta = \frac{M_{кр}}{G\beta bh^2} \leq [\theta]$	
	3.	$\theta = \frac{M_{кр}}{Gabh^3} \leq [\theta]$	
	4.	$\theta = \frac{M_{кр}}{G\beta bh^3} \leq [\theta]$	
34	Какого вида деформацию испытывают цилиндрические пружины з малым шагом витка?		40
	1. Растяжение и сжатие.		
	2. Изгиб.		
	3. Изгиб с растяжением.		
	4. Кручение.		

35	Какое из выражений следует использовать для определения осадки цилиндрической пружины с малым шагом витка?	60
1.	$\lambda = \frac{8PR^3n}{Gd^4}$	
2.	$\lambda = \frac{32PR^3n}{Gd^4}$	
3.	$\lambda = \frac{64PR^3n}{Gd^4}$	
4.	$\lambda = \frac{128PR^3n}{Gd^4}$	
36	Как определить необходимый объем цилиндрической пружины, если известна величина энергии $T$ , которую пружина должна поглотить при эксплуатации?	60
1.	$V = \frac{4G[\tau]^2}{T}$	
2.	$V = \frac{16T[\tau]^2}{G}$	
3.	$V = \frac{32TG}{[\tau]^2}$	
4.	$V = \frac{4TG}{[\tau]^2}$	